

泛函分析

一、课程编码:

课内学时: 64 学时 (模块一) +16 学时 (模块二); 学分: 2 (模块一) +1 (模块二);
学分: 3 学时: 48

二、适用专业:

模块一适合数学学院本科生、硕士研究生, 工科的本科生、硕士研究生和博士研究生;
模块二适合数学学院优秀本科生、硕士研究生和博士研究生, 工科的优秀硕士研究生和博士研究生。

三、先修课程: 数学分析、实变函数、近世代数。

四、教学目的与内容介绍

本课程是一门专业基础课, 适合于数学系个专业。泛函分析是现代数学的一个重要分支, 随着科学技术的迅速发展, 泛函分析的概念、方法已经渗透到数学的各个分支而且日益广泛地被应用于自然科学, 工科技术理论和社会科学的各个领域, 是必要的数学基础。通过该课程的学习, 学生不仅能学到泛函分析的基本理论和方法, 而且对学习其他数学分支以及把他应用到数理经济, 现代控制论, 量子场论, 统计物理, 工程技术等领域有很大帮助。

在模块一的学习过程中, 学生应熟练掌握 L^p 空间、 L^p 空间的概念和性质, 熟练掌握 Banach 空间、Hilbert 空间的概念和性质, 理解并掌握 Banach 空间和 Hilbert 空间的线性有界算子的基本概念和理论, 理解并掌握压缩映射原理、正交分解定理、Riesz 表示定理、开映射定理、闭图像定理、共鸣定理以及泛函延拓定理。

在模块二中, 学生应掌握谱测度与谱积分的性质和计算公式, 掌握拓扑线性空间的概念以及等价刻画; 了解广义函数的性质和基本运算规则。

五、教学方式

以课堂教学为主, 根据课堂教学内容适当增加课堂讨论内容。

六、主要内容及学时分配

模块一 (64 学时)

1. L^p 空间 (20 课时, 含 4 课时习题课)
 - 1.1 L^p 空间的定义和性质
 - 1.2 L^p 空间的完备性与可分性
 - 1.3 L^2 空间的内积和性质
 - 1.4 卷积的定义及基本性质
 - 1.5 L^2 空间上的 Fourier 变换
2. Hilbert 空间理论 (20 课时, 含 4 课时习题课)
 - 2.1 距离空间的定义和完备化
 - 2.2 列紧性与可分性
 - 2.3 压缩映射原理
 - 2.4 希尔伯特空间的定义
 - 2.5 希尔伯特空间正交基定义及其存在性

- 2.6 Riesz 表示定理
- 2.7 希尔伯特空间上线性有界算子与连续算子
- 2.8 希尔伯特空间上的紧算子
- 2.9 Fredholm 理论, 紧算子的谱
- 2.10 Hilbert-Schmidt 理论
- 3. Banach 空间 (22 课时, 含 4 课时习题课)
 - 3.1 Banach 空间的定义
 - 3.2 线性赋范空间的模等价
 - 3.3 Banach 空间上线性有界算子
 - 3.4 逆算子定理, 闭图像定理与共鸣定理
 - 3.5 泛函延拓定理, Banach 空间上线性连续泛函存在性
 - 3.6 共轭空间及其表示
 - 3.7 弱收敛与弱*收敛
 - 3.8 弱列紧与弱*列紧

模块二 (16 学时)

- 4. 谱映射与算子演算 (6 课时)
 - 4.1 谱测度与谱投影
 - 4.2 谱积分
 - 4.3 正规算子的谱积分
 - 4.4 酉算子的谱积分
- 5. 拓扑线性空间 (5 课时)
 - 5.1 拓扑线性空间及其邻域系
 - 5.2 局部凸拓扑线性空间
 - 5.3 Minkowski 函数
 - 5.4 拓扑线性空间的可度量化
- 6. 广义函数 (5 课时)
 - 6.1 广义函数的基本概念
 - 6.2 广义函数的运算
 - 6.3 广义函数的求导, 方程的弱解

七、考核与成绩评定

考核方式:

模块一采用统一命题, 微机试题库辅助, 统一阅卷, 集体复查, 严把质量关。

模块二通过小论文的进行考核。

成绩评定:

模块一的考试占 80%, 平时作业、小测验及日常考核等占 20%, 按百分制给出最终成绩。

模块二的论文成绩占 80%, 平时作业及日常考核等占 20%, 按百分制给出最终成绩。

八、大纲说明

1. 本大纲是根据教育部基础课程教学指导委员会制定的《泛函分析》课程教学基本要求，并适当考虑我校本硕博一体化教学改革要求而制定的。

2. 在保证基本教学要求的前提下，教师可以根据实际情况，对内容进行适当的调整和删节。

3. 本科生选修模块一 64 个课时，考核通过后可以获得 4 个学分，研究生选修模块一 64 个课时，考核通过后可以获得 2 个学分；本科生选修模块二 16 个课时，考核通过后可以获得 1 个学分，研究生选修模块二 16 个课时，考核通过后可以获得 1 个学分。

九、参考书以及必读参考资料

教材：郭懋正. 实变函数与泛函分析 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.

参考书：

- [1] 王声望, 郑维行. 实变函数与泛函分析概要 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [2] 程其襄, 张奠宙. 实变函数与泛函分析基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 (上册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 1998.
- [4] 蒋立宁, 泛函分析 (内部讲义)

十、大纲撰写人：蒋立宁